FONCTIONS POLYNÔMIALES DU SECOND DEGRÉ

OBJECTIFS

- Être en mesure de vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 ou 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie…).
- Savoir associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2+c$ et $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$.

I Définitions

1. Fonction du second degré

À RETENIR

Définition

On appelle **fonction polynômiale du second degré** (ou **fonction du second degré** pour abréger) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

L'expression littérale ax^2+bx+c est un **polynôme de degré** 2.

EXEMPLE

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est une fonction du second degré.

2. Racines

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction du second degré. On appelle **racine** de f, tout nombre x vérifiant $f(x) = 0$. Une fonction du second degré admet au plus deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1

Combien de racines la fonction $f : x \mapsto x^2+1$ possède-t-elle dans $\mathbb{R}$? .....

.....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-1.

3. Forme développée, forme factorisée

À RETENIR

Définition

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré.

— La forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée **forme développée** de f.

— Si f admet deux racines x_1 et x_2, alors on peut écrire $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Cette dernière expression est appelée **forme factorisée** de f.

EXEMPLE

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$. C'est une fonction du second degré (avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$). Comme $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, on a :

1. La forme factorisée de f : $f(x) = (x+1)^2 = (x+1)(x+1)$.
2. La forme développée de f : $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

EXERCICE 2

On définit une fonction f du second degré sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$.

1. Factoriser $f(x)$. .....
2. Quelles sont les racines de f ? .....
3. En déduire formes développées et factorisées de f.
   a. Forme factorisée de f : ..... b. Forme développée de f : .....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-2.

II Courbe représentative

1. Orientation de la parabole

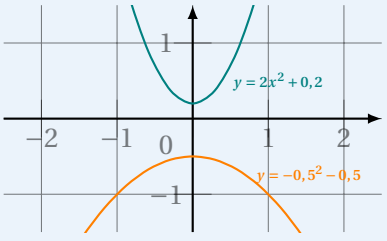
À RETENIR

Définition

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré. La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, est une **parabole**.

— Lorsque $a > 0$, on dit que la parabole $\mathscr{C}_f$ est **tournée vers le haut** : elle forme un "sourire".

— Lorsque $a < 0$, on dit que la parabole $\mathscr{C}_f$ est **tournée vers le bas** : elle forme un "sourire inversé".



EXERCICE 3

Pour chacune des fonctions du second degré ci-dessous, donner l'orientation de sa courbe représentative.

1. $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$: ..... 2. $g : x \mapsto 1 - x^2$: ..... 3. $h : x \mapsto (1-x)^2$: .....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-3.

2. Sommet, axe de symétrie

À RETENIR

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré.

— Le sommet de la parabole $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(\alpha ; \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

— La parabole $\mathscr{C}_f$ admet un axe de symétrie vertical d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

EXERCICE 4

Après avoir esquissé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 4x^2 + 8x + 1$, déterminer le tableau de variation de f.

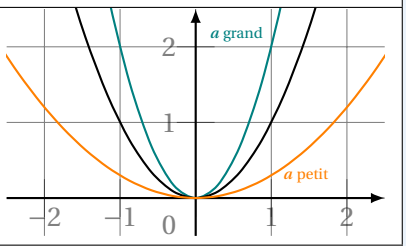
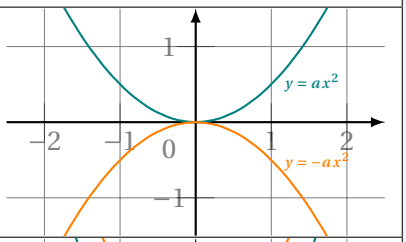
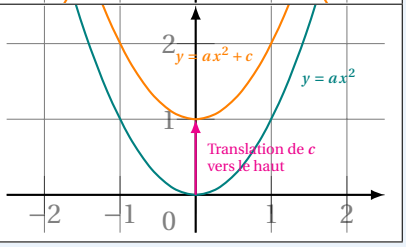
Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-4.

3. Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$

À RETENIR

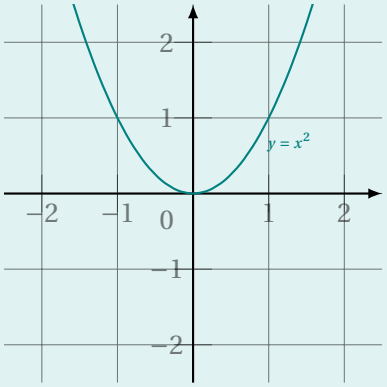
Propriété

Soit $f : x \mapsto ax^2 + c$ une fonction du second degré (notons que le coefficient b est nul).

Propriété	Illustration
L'axe de symétrie de f est la droite d'équation $x = 0$. Plus a est proche de zéro, plus la courbe "s'écarte". À l'inverse, plus le coefficient a s'éloigne de zéro, plus la courbe "se contracte".	
La courbe représentative de $x \mapsto ax^2$ est symétrique à celle de $x \mapsto -ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses.	
La courbe représentative de f est la même que celle de $x \mapsto ax^2$, mais translatée de c unités de longueur vers le haut.	

EXERCICE 5

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction carré $x \mapsto x^2$. Tracer à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -3x^2 - 0,5$. Décrire les différentes étapes.



Étape 1. .....

Étape 2. .....

Étape 3. .....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-5.

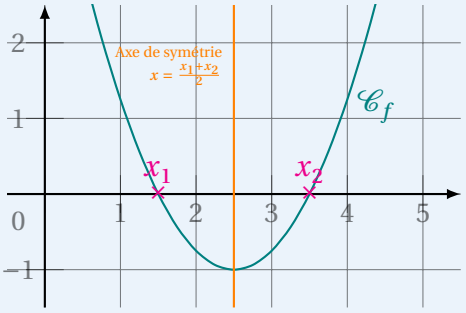
4. Lien avec les racines

À RETENIR

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré. Alors, f admet deux racines x_1 et x_2 si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans ce cas, les coordonnées de ces points d'intersection sont $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$. De plus, l'axe de symétrie vertical de f a pour équation $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.



EXERCICE 6

On définit une fonction f du second degré sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$.

1. Vérifier que -2 et 5 sont les racines de f. .....

   .....

2. En déduire la forme factorisée de f. .....

3. Donner les tableaux de signes et de variation de f.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-6.