

## OBJECTIFS ↻

- Être en mesure de vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 3.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Savoir résoudre des équations de la forme  $x^3 = c$  avec  $c$  positif.

## I Racine cubique

### 1. Rappels

#### À RETENIR ↻

#### Définition

La **fonction cube** est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto x^3$ .

#### EXERCICE 1 ✍

Effectuer les calculs suivants.

1.  $2^3 = \dots\dots\dots$     2.  $-2^3 = \dots\dots\dots$     3.  $(-3)^3 = \dots\dots\dots$     4.  $5^3 = \dots\dots\dots$

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-1>.

#### À RETENIR ↻

#### Propriété

- La fonction cube est une fonction impaire.
- Tout nombre réel  $a$  admet un unique antécédent par la fonction cube : il s'agit de sa **racine cubique**, que l'on note  $\sqrt[3]{a}$ .

#### EXERCICE 2 ✍

Effectuer les calculs de racines cubiques suivants.

1.  $\sqrt[3]{125} = \dots\dots\dots$     2.  $\sqrt[3]{-8} = \dots\dots\dots$     3.  $\sqrt[3]{-1} = \dots\dots\dots$     4.  $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-2>.

### 2. Équations $x^3 = c$

#### À RETENIR ↻

#### Propriété

On considère un nombre réel  $c$  positif. Alors, l'équation  $x^3 = c$  admet une unique solution, qui est  $\sqrt[3]{c}$ .

### EXERCICE 3

Résoudre l'équation  $x^3 + x - 2 = x$ . .....

.....

• Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-3>.



## II Définitions

### 1. Fonction du troisième degré

#### À RETENIR

#### Définition

On appelle **fonction polynômiale du troisième degré** (ou **fonction du troisième degré** pour abrégé) toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ .

L'expression littérale  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  est un **polynôme de degré 3**.

#### EXEMPLE

La fonction cube  $x \mapsto x^3$  est une fonction du troisième degré.

### 2. Racines

#### À RETENIR

#### Définition

Soit  $f$  une fonction du troisième degré. On appelle **racine** de  $f$ , tout nombre  $x$  vérifiant  $f(x) = 0$ . Une fonction du troisième degré admet au plus troisième racines distinctes dans  $\mathbb{R}$ .

#### EXERCICE 4

Combien de racines distinctes la fonction  $f : x \mapsto x^3 - 1$  possède-t-elle dans  $\mathbb{R}$ ? .....

.....

• Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-4>.



### 3. Forme développée, forme factorisée

#### À RETENIR

#### Définition

Soit  $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$  une fonction du troisième degré.

- La forme  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  est appelée **forme développée** de  $f$ .
- Si  $f$  admet trois racines  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , alors on peut écrire  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ . Cette dernière expression est appelée **forme factorisée** de  $f$ .

**EXEMPLE** 🔦

On définit une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ . C'est une fonction du second degré (avec  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 11$  et  $d = -6$ ). Comme  $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ , on a :

- La forme factorisée de  $f : f(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)$ .
- La forme développée de  $f : f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .

**EXERCICE 5** ✍️

1. Déterminer la forme développée de la fonction du troisième degré  $f : x \mapsto (x - 1)(x^2 + x + 1)$ . .....  
 .....  
 .....
2. Admet-elle une forme factorisée? .....  
 .....  
 .....  
 .....

👉 Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-5>.

## III Courbe représentative

### 1. Fonctions $x \mapsto ax^3 + d$

**À RETENIR** ∞

Propriété

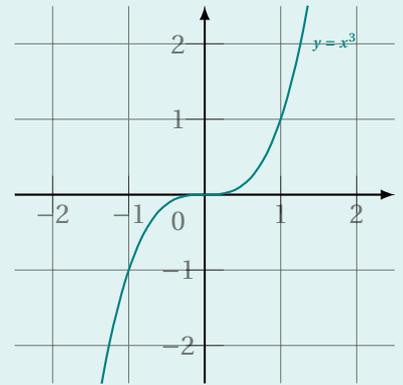
Soit  $f : x \mapsto ax^3 + d$  une fonction du troisième degré (notons que les coefficients  $b$  et  $c$  sont nuls).

Propriété	Illustration
Le centre de symétrie de $f$ est le point de coordonnées $(0; d)$ . Plus $a$ est proche de zéro, plus la courbe "s'écarte". À l'inverse, plus le coefficient $a$ s'éloigne de zéro, plus la courbe "se contracte".	
La courbe représentative de $x \mapsto ax^3$ est symétrique à celle de $x \mapsto -ax^3$ par rapport à l'axe des abscisses.	
La courbe représentative de $f$ est la même que celle de $x \mapsto ax^3$ , mais translaturée de $d$ unités de longueur vers le haut.	

### EXERCICE 6

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction cube  $x \mapsto x^3$ . Tracer à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto -3x^3 + 0,5$ . Décrire les différentes étapes.

- Étape 1. ....
- Étape 2. ....
- Étape 3. ....



• Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-6>.

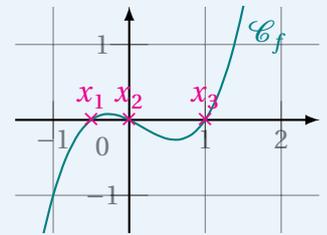
## 2. Lien avec les racines

### À RETENIR

#### Propriété

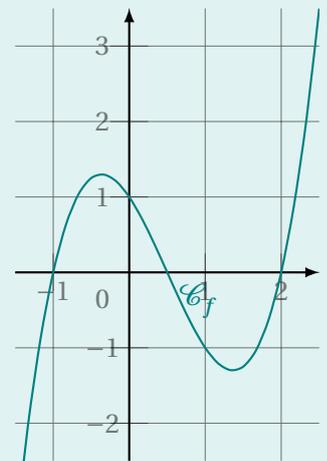
Soit  $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$  une fonction du troisième degré. Alors,  $f$  admet trois racines  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans ce cas, les coordonnées de ces points d'intersection sont  $(x_1; 0)$ ,  $(x_2; 0)$  et  $(x_3; 0)$ .



### EXERCICE 7

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto x^3 - 1,5x^2 - 1,5x + 1$ . Déterminer sa forme factorisée.



• Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-7>.