



EXERCICE

En latin, *ratio* signifie “compter”. Un nombre *rationnel* est donc un nombre “que l’on sait compter” : il est quotient de deux entiers dont l’écriture décimale peut être infinie (mais dans ce cas nécessairement périodique). Par exemple,

$$\frac{2}{7} = 0, \underbrace{285714}_{\text{période}} \underbrace{285714}_{\text{période}} \underbrace{285714}_{\text{période}} \dots$$

est un nombre rationnel.

L’objectif de cette activité est de démontrer que $\sqrt{2}$ n’est pas un nombre rationnel. On rappelle pour cela que :

- n est un nombre entier pair si et seulement s’il est de la forme $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par exemple, $4 = 2 \times \underbrace{2}_k$,
 $6 = 2 \times \underbrace{3}_k, \dots$
- n est un nombre entier impair si et seulement s’il est de la forme $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par exemple,
 $7 = 2 \times \underbrace{3}_k + 1, 9 = 2 \times \underbrace{4}_k + 1, \dots$

1. **a.** Soit n un nombre. On suppose n impair. Démontrer que n^2 est impair.
b. Quelle est la contraposée de cette implication ?
2. On suppose par l’absurde que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.
 - a.** Démontrer que $2q^2 = p^2$.
 - b.** Que peut-on dire de p^2 ? Et de p ?
 - c.** Démontrer que q^2 est pair.
 - d.** Trouver un diviseur commun à p et q .
 - e.** Conclure.

INFORMATION

Les grecs, et plus particulièrement l’école Pythagoricienne, voyaient en les nombres rationnels l’expression même de la beauté (visuelle comme musicale). Ceux-ci ont d’ailleurs basé leur philosophie dessus : “Tout est nombre”.

Hippase de Métaponte, disciple de Pythagore, montra que la diagonale d’un carré de côté 1 (qui vaut $\sqrt{2}$) ne peut pas s’écrire comme un quotient de deux entiers : il venait de divulguer l’existence des nombres *irrationnels*. La légende raconte que, pour avoir transgressé la doctrine Pythagoricienne, Hippase fut jeté par-dessus bord et noyé dans les eaux de la mer Méditerranée par les autres disciples...

